

# SUR LA DIFFUSION NON-LINEAIRE DE LA CHALEUR

T. ANDRE-TALAMON

Laboratoire de Mécanique Physique, 2, place de la Gare de Ceinture, 78-Saint-cyr-l'Ecole, France

(Reçu le 16 Februar 1968)

**Résumé**—On calcule la solution, approchée au second ordre, du problème de l'échauffement et du refroidissement d'un mur semi-infini dont les caractéristiques thermophysiques varient avec la température. La non-linéarité entraîne une dissymétrie entre l'échauffement et le refroidissement. La négligence de cette non-linéarité conduit à une erreur appréciable dans la mesure, en régime transitoire, de la diffusivité thermique des matériaux.

## NOTATIONS

$x$ , variable d'espace [m];  
 $L$ , longueur [m];  
 $t$ , variable de temps [s];  
 $T$ , température [°K];  
 $T_0$ , température initiale du mur semi-infini;  
 $T_1$ , température de la face d'entrée du mur semi-infini;  
 $\lambda$ , conductibilité thermique [J/m s °C];  
 $C$ , chaleur spécifique [J/kg °C];  
 $\rho$ , masse spécifique [kg/m<sup>3</sup>];  
 $D$ ,  $= \frac{\lambda}{C\rho}$ , diffusivité thermique [m<sup>2</sup>/s<sup>-1</sup>];  
 $D_0$ ,  $= \frac{\lambda_0}{C_0\rho_0}$ , diffusivité thermique à la température  $T_0$ ;  
 $\varphi \, dS \cdot dt$ , flux de chaleur pendant le temps  $dt$  à travers la surface  $dS$ ;  
 $a_n$ , coefficient du développement de Taylor de la conductibilité thermique;  
 $b_n$ , coefficient du développement de Taylor de la chaleur spécifique;  
 $c_n$ , coefficient du développement de Taylor du volume spécifique;  
 $\xi$ ,  $= x/L$ , variable d'espace réduite;

$\eta$ ,  $= \frac{D_0 t}{L^2}$ , variable de temps réduite;  
 $k$ ,  $= \frac{T_1 - T_0}{T_0}$ , paramètre de perturbation;  
 $\phi$ ,  $= \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\xi, \eta) \cdot k^n$ , température réduite;  
 $\phi_n(\xi, \eta)$ , coefficient d'ordre  $n$  du développement de la température réduite en série de puissances de  $k$ ;  
 $\phi^{(n)}(\xi, \eta)$ ,  $= \sum_{i=0}^{i=n} \phi_i(\xi, \eta) \cdot k^i$ , approximation d'ordre  $n$ , du problème non-linéaire;  
 $\mathcal{L}$ ,  $\equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$ , opérateur linéaire de l'équation de la chaleur.

## 1. INTRODUCTION

LA THÉORIE de la diffusion de la chaleur a été développée de façon considérable à partir de l'étude de l'équation parabolique:

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Cette équation est *linéaire* tant que le coefficient  $D$ , appelé diffusivité, ne dépend pas de

la solution  $T$  mais seulement des coordonnées d'espace  $x$  et de temps  $t$ .

Cette condition n'est pratiquement pas remplie pour bon nombre de corps rencontrés dans les problèmes de diffusion thermique. Il est en effet bien plus fréquent de voir le coefficient de conductibilité thermique  $\lambda$ , la chaleur spécifique  $C$  et la masse spécifique  $\rho$ , dépendre de la température plutôt que de la position du point considéré.

La diffusivité  $D = \lambda/C\rho$  est généralement fonction de la température, et l'équation (1) est du type *quasi-linéaire*.

On élude la plupart du temps cette difficulté en linéarisant l'équation, c'est-à-dire en fait, en se bornant à l'étude des petites perturbations et en adoptant pour les coefficients  $\lambda$ ,  $C$  et  $\rho$ , des valeurs moyennes dans l'intervalle de variation des températures considéré.

Dans certains cas pourtant, où l'on veut connaître les conditions des écoulements thermiques dans des milieux soumis soit à des variations importantes de température, soit à des variations brusques de celle-ci, cette simplification n'est plus satisfaisante.

Pour déterminer par exemple, la diffusivité des solides aux températures élevées, on utilise la méthode consistant à observer le cheminement, dans le milieu considéré, d'un signal thermique bien défini, provoqué et entretenu en un point de ce milieu et à un instant donné [1-3].

La diffusivité est déduite de la comparaison de l'observation à la solution du problème linéarisé. Cette valeur peut s'écarter, de façon appréciable, de celle résultant de la comparaison avec la solution du problème complet.

## 2. L'EQUATION NON-LINEAIRE DE LA CHALEUR

L'hypothèse initiale de Fourier exprime la proportionnalité de flux instantané de chaleur  $\varphi$  au gradient thermique local; c'est-à-dire pour un écoulement unidirectionnel au travers d'un élément de section  $dS$

$$\varphi(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS dt. \quad (2)$$

Si l'on ajoute l'équation de conservation de l'énergie, appliquée à l'unité de masse

$$\frac{1}{\rho} [\varphi(x + dx, t) - \varphi(x, t)] = [(CT)_{t+dt} - (CT)_t] dS dx \quad (3)$$

on obtient finalement l'équation non linéaire de la chaleur:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (CT) = 0 \quad (4)$$

où  $\lambda$ ,  $\rho$  et  $C$  sont toutes trois fonctions de la température. Cette équation (4) s'écrit encore:

$$D \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\partial T}{\partial t} \left[ 1 + \frac{T}{C} \frac{\partial C}{\partial T} \right] = 0. \quad (5)$$

Si pour résoudre la plupart des problèmes posés par l'équation linéaire de la chaleur, on dispose des méthodes analytiques classiques du développement en série de fonctions orthogonales et du calcul fonctionnel, il n'en est plus de même pour une équation telle que (5) pour laquelle ces méthodes deviennent inopérantes.

C'est au niveau théorique même que l'intégration de l'équation (5) est pénible. Treves [4] a présenté récemment une synthèse des travaux relatifs aux conditions d'existence des solutions de l'équation quasi-linéaire parabolique et aux méthodes d'intégration.

Pour ce qui est du calcul effectif des solutions de (5) on a généralement recours à des méthodes d'approximations successives, tel le calcul approché par différences finies. Une liste d'articles et ouvrages récents, consacrés à cette méthode, figure également dans l'article de Treves.

Pourtant la méthode du calcul par différences finies, si puissante soit-elle, présente le double inconvénient d'une méthode lourde et uniquement numérique; en sorte que le long calcul pas à pas doit être repris pour chaque problème de données différentes.

On peut cependant, dans certains cas, obtenir par une méthode d'approximation successives, dite méthode des perturbations, une solution approchée de l'équation quasi-linéaire (5).

Clauson [5], Tung [6] et Ivanov [7], ont appliqué cette méthode au problème du mur relatif à un solide dont la conductibilité thermique  $\lambda$  et la chaleur spécifique  $C$  sont des fonctions linéaire de la température. Ils ont cependant quelque peu simplifié l'équation (5) en négligeant la variation relative  $(1/C) \partial C/\partial T$  de la chaleur spécifique, en fonction de la température et en supposant la masse spécifique  $\rho$  constante.

Nous allons calculer ci-après, par la méthode des perturbations, la solution poussée jusqu'au ordre d'approximation, du problème relatif au cheminement unidirectionnel d'un signal thermique, provoqué subitement et entrete nu sur la face d'entrée d'un milieu semi-infini constitué par un corps dont la conductibilité thermique  $\lambda$ , la chaleur spécifique  $C$  et la masse spécifique  $\rho$ , sont des fonctions quelconques de la température, continues et dérivables.

3. DEFINITION DE LA PERTURBATION

Soit donc un milieu semi-infini, initialement à la température uniforme  $T_0$  et constitué par un corps pour lequel  $\lambda$ ,  $C$  et  $\rho$  s'expriment respectivement par :

$$\lambda = \lambda_0 [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (T - T_0)^n] \tag{6}$$

$$C = C_0 [1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (T - T_0)^n] \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (T - T_0)^n]. \tag{8}$$

A l'instant  $t = 0$ , la face d'entrée de ce milieu semi-infini, prise pour origine des abscisses, est brusquement portée à la température  $T_1$  et y est ensuite maintenue indéfiniment ; en sorte que

les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} T(x, 0) &= T_0; \quad x \geq 0 \\ T(0, t) &= T_1; \quad t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) &= T_0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = T_1. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

On se propose de déterminer l'évolution au cours du temps du champ de température dans le milieu.

Il s'agit d'un cas le plus simple de problème mixte du premier type (conditions de Dirichlet). On sait que (voir par exemple l'article de Treves [4]), dans ces conditions, l'équation quasi-linéaire (5) admet une solution et une seule, qui est de plus indéfiniment différentiable par rapport à  $x$  et  $t$  dans tout le domaine d'intégration et sa frontière.

La perturbation, ainsi provoquée en un point du milieu, sera parfaitement caractérisée par son amplitude  $(T_1 - T_0)$ . Nous adopterons donc comme paramètre de perturbation le coefficient sans dimension :

$$k = \frac{T_1 - T_0}{T_0}. \tag{10}$$

On normalisera l'équation (5) en effectuant les changements de variables et de fonction suivants :

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0(1 + k\phi) \\ \xi &= x/L \\ \eta &= \frac{D_0 t}{L^2}. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$L$  étant une longueur quelconque et  $D_0 = \lambda_0/C_0\rho_0$ , la diffusivité du milieu à la température initiale  $T_0$ .

L'équation (5) devient finalement :

$$\begin{aligned} & [1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n k^n T_0^n \phi^n] [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n k^n T_0^n \phi^n] \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \\ & + [1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n k^n T_0^n \phi^n] [ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n k^n T_0^n \phi^{n-1} ] \\ & \times \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n k^n T_0^n \phi^n] \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ & + [ \sum_{n=1}^{\infty} n b_n k^n T_0^n \phi^{n-1} ] \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{12}$$

et les conditions aux limites (8):

$$\left. \begin{aligned} \phi(\xi, 0) &= 0; \xi \geq 0 \\ \phi(0, \eta) &= 1; \eta > 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi, \eta) &= 0; \lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi(\xi, \eta) = 1. \end{aligned} \right\} (13)$$

On recherchera une solution de (12) satisfaisant à (13) sous la forme d'une série de puissances du paramètre de perturbation  $k$ :

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\xi, \eta) \cdot k^n \quad (14)$$

où tous les coefficients  $\phi_n(\xi, \eta)$  sont des fonctions infiniment différentiables par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  et telles que:

$$|\phi_n(\xi, \eta)| \leq M \quad (15)$$

pour tout couple  $(\xi, \eta)$  et tout  $n$ . Ce développement sera uniformément convergent pourvu que  $|k| < 1$ ; ce qui correspond à une amplitude de perturbation satisfaisante.

Substituant (14) dans (12), on obtient une suite infinie d'équations aux dérivées partielles linéaires et non-homogènes en annulant dans la substitution les coefficients de  $k^n$ .

L'équation (12) où l'on a substitué  $\phi$  par le développement (14) et ses dérivées partielles, devient en effet une identité, étant valable quelque soit la valeur de  $k$  (pourvu que  $|k| < 1$ ).

Utilisant pour simplifier l'écriture, l'opérateur:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$$

et limitant tous les développements aux termes de puissance deux inclus, on obtient le système de trois équations aux dérivées partielles linéaires:

$$L(\phi_0) = 0 \quad (16)$$

$$L(\phi_1) = 2\alpha \cdot \phi_0 \cdot \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + 2\beta \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (17)$$

$$L(\phi_2) = 2\alpha \left( \phi_0 \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} \right)$$

$$+ 4\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + 2\gamma \phi_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \xi^2} + 2\delta \phi_0 \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (18)$$

en posant:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha &= -(a_1 - 2b_1 + c_1) T_0 \\ 2\beta &= -a_1 T_0 \\ 2\gamma &= -[a_1 c_1 - 2b_1(a_1 - 2b_1 + c_1) \\ &\quad + (a_2 + c_2 - 3b_2)] T_0^2 \\ 2\delta &= -[a_1 c_1 - 2a_1 b_1 + 2a_2] T_0^2 \end{aligned} \right\} (19)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(\xi, 0) &= 0; \xi \geq 0 \\ \phi_0(0, \eta) &= 1; \eta > 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_0(\xi, \eta) &= 0; \lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi_0(\xi, \eta) = 1 \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\phi_n(\xi, 0) = \phi_n(0, \eta) = 0 \quad \text{pour tout } n > 0 \quad (21)$$

$\phi_n$  nul à l'infini.

#### 4. DETERMINATION DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

La fonction génératrice  $\phi_0$  est évidemment la solution bien connue du problème linéaire (correspondant à  $k = 0$ ) satisfaisant aux conditions aux limites (14), à savoir:

$$\phi_0(\xi, \eta) = \operatorname{erfc}(u) \quad (22)$$

avec: 
$$u = \frac{\xi}{2\sqrt{\eta}} \quad (23)$$

Reportant (22) dans (17), la première approximation  $\phi_1$  sera solution de l'équation linéaire non-homogène, dont le second membre est une fonction connue de  $\xi$  et  $\eta$ .

Cette équation étant linéaire, sa solution générale sera égale à la solution générale de l'équation homogène à laquelle on ajoute une

\* Selon la notation anglo-saxonne, nous appelons  $\operatorname{erfc}(x)$  le complémentaire de la fonction d'erreur:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

solution particulière de l'équation avec second membre.

Or si l'on remarque que,  $U$  et  $V$  étant deux solutions distinctes de l'équation homogène [donc  $L(U) = L(V) = 0$ ], on a :

$$L(U \cdot V) = 2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

on obtient immédiatement une solution particulière de l'équation (17) :

$$\phi_1 = \alpha \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \cdot \int_0^\xi \phi_0(y, \eta) dy + \beta \phi_0^2.$$

On vérifie en effet aisément que  $\partial \phi_0 / \partial \xi$  et  $\int_0^\xi \phi_0(y, \eta) dy$  sont des solutions de l'équation homogène.

Remplaçant  $\phi_0$  par son expression (22) et par des calculs élémentaires, on obtient l'expression de l'intégrale particulière de l'équation (17).

Pour terminer la détermination de la première approximation, on ajoutera une solution de l'équation homogène, pour satisfaire aux conditions aux limites (20).

On trouve finalement

$$\phi_1(\xi, \eta) = -\frac{2\alpha}{\pi} [\operatorname{erfc}(u) \cdot (1 + \sqrt{\pi} u \cdot e^{-u^2}) - e^{-2u^2}] - \beta \operatorname{erf}(u) \cdot \operatorname{erfc}(u) \quad (24)$$

avec  $-2\alpha = (a_1 - 2b_1 + c_1) T_0$   
 et  $-2\beta = a_1 T_0$ .

En définitive la première approximation du problème non linéaire sera :

$$\phi^{(1)}(\xi, \eta) = \phi_0(\xi, \eta) + k\phi_1(\xi, \eta). \quad (25)$$

Le calcul de la deuxième approximation, c'est-à-dire la solution du système (18-21), est évidemment plus délicate, étant donnée la complexité du second membre de (18) où figurent les solutions  $\phi_0$  et  $\phi_1$  de (16) et (17).

La méthode la plus simple consiste à chercher une solution ne dépendant que de la variable  $u$ ; le problème se ramenant à la détermination d'une intégrale particulière de l'équation simple-

ment différentielle :

$$\begin{aligned} \phi_2''(u) + 2u\phi_2'(u) &= 2\alpha[\phi_0(u) \cdot \phi_1'(u) \\ &+ \phi_1(u) \cdot \phi_0''(u)] + 4\beta \phi_0'(u) \cdot \phi_1'(u) \\ &+ 2\gamma \phi_0^2(u) \cdot \phi_0''(u) + 2\delta \phi_0(u) \cdot \phi_0'^2(u). \end{aligned}$$

Cette détermination s'effectue par quadratures dont la complexité ne tient qu'à leur longueur.

On trouve finalement, en tenant compte des conditions aux limites (21) et du tableau (19) :

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) &= A \operatorname{erf}(u) \cdot \operatorname{erfc}(u) [1 + \operatorname{erfc}(u)] \\ &+ B(1 - e^{-2u^2}) \operatorname{erfc}(u) \\ &+ C[\operatorname{erf}(u\sqrt{3}) - \operatorname{erf}(u)] \\ &+ D u \cdot e^{-u^2} \cdot \operatorname{erfc}^2(u) \\ &+ E u e^{-u^2} [(\sqrt{\pi}) \cdot u \cdot \operatorname{erfc}(u) \\ &- e^{-u^2}]^2. \quad (26) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a_2}{3} - \frac{a_1^2}{2}\right) T_0^2 \\ B &= -\frac{1}{\pi} [(3a_1 + 2b_1 + c_1)(a_1 - 2b_1 + c_1) \\ &\quad - 2a_1c_1 - 2(a_2 - 3b_2 + c_2)] T_0^2 \\ C &= \frac{(\sqrt{3})}{4\pi} [(3a_1 + 6b_1 + c_1)(a_1 - 2b_1 + c_1) \\ &\quad - 4a_1c_1 - 4(a_2 - 3b_2 + c_2)] T_0^2 \\ D &= -\frac{1}{4(\sqrt{\pi})} [(9a_1 + 2b_1 + 3c_1) \\ &\quad (a_1 - 2b_1 + c_1) - 4a_1c_1 \\ &\quad - 4(a_2 - 3b_2 + c_2)] T_0^2 \\ E &= \frac{1}{2\pi(\sqrt{\pi})} [(a_1 - 2b_1 + c_1)^2] T_0^2 \end{aligned} \quad (27)$$

et la deuxième approximation s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(\xi, \eta) &= \phi_0(\xi, \eta) + k\phi_1(\xi, \eta) \\ &\quad + k^2\phi_2(\xi, \eta). \quad (28) \end{aligned}$$

On pourrait poursuivre, sans difficulté théorique, le calcul jusqu'à un ordre d'approximation plus élevé, mais le gain de précision serait dérisoire eu égard à la longueur du calcul qu'impliquerait cette démarche.

5. APPLICATION NUMERIQUE

Si le coefficient de perturbation  $k$  est petit ( $k \neq 0,1$ ) le développement (14) converge rapidement et l'on pourra se contenter de l'approximation (28) pour représenter l'échauffement ou le refroidissement du mur semi-infini.

On remarque que cette expression (28) dépend du signe du paramètre  $k$ ; autrement dit, à la différence de la solution du problème linéaire, les conditions de l'échauffement du mur ( $k > 0$ ) et celles de son refroidissement ( $k < 0$ ) ne sont pas symétriques.

L'approximation (28) pourra s'appliquer à n'importe quel corps, pour autant que l'équation de la diffusion (5) soit appropriée.

A simple titre d'exemple, nous allons appliquer l'expression (28) au mercure à la température initiale:  $T_0 = 422^\circ\text{K}$  et pour une perturbation:  $k = \pm 0,25$ ; c'est-à-dire un échauffement ou un refroidissement de  $105^\circ\text{C}$ .

Les données numériques relevées dans [8], relatives au mercure sont approchées à moins de 0,5% par les expressions (6-8) pour lesquelles on  $a$ , entre  $50^\circ\text{C}$  et  $250^\circ\text{C}$ :

$$\lambda: \begin{cases} a_1 = 1,720 \cdot 10^{-3} (\text{°C})^{-1} \\ a_2 = -3,480 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-2} \end{cases}$$

C:  $b_1 = b_2 = 0$

$$\frac{1}{\rho} \begin{cases} c_1 = 1,286254 \cdot 10^{-3} (\text{°C})^{-1} \\ c_2 = 4,018882 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-2} \end{cases}$$

A ces valeurs et pour  $T_0 = 422^\circ\text{K}$ , correspondent les tableaux:

$$\left. \begin{aligned} -2\alpha &= 1,268639 \\ -2\beta &= 0,725840 \end{aligned} \right\} \quad (19')$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -0,469999 \\ B &= -0,786607 \\ C &= 0,205549 \\ D &= -1,183881 \\ E &= 0,144518. \end{aligned} \right\} \quad (27')$$

La Fig. 1 représente, en fonction de

$$u = \frac{x}{2\sqrt{(D_0 t)}}$$

les expressions de  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  données par (22, 24, 26).

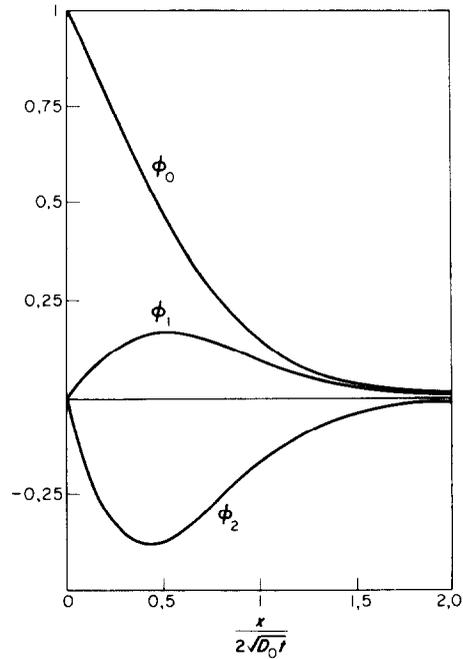


FIG. 1.

La condition (15) est effectivement remplie, mais si  $k$  n'est pas assez petit, on ne peut se contenter de la première approximation (25), voire de la seconde (28).

La Fig. 2 représente la solution  $\phi^{(2)}(\xi, \eta)$  approchée au second ordre, pour diverses valeurs de  $\xi$  et de  $\eta$  variant entre 0 et 1.

On constate que la non-linéarité accélère l'échauffement du mur, et retarde, mais de façon plus accusée, son refroidissement.

La diffusivité du mercure à  $422^\circ\text{K}$  vaut  $71,740 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ ; à 1 cm de la face d'entrée du mur semi-infini, le temps réduit  $\eta = 1$  correspond à 14 s.

Si par exemple on voulait déterminer la diffusivité du mercure à  $422^\circ\text{K}$  en mesurant, à 1 cm de l'interface, le temps au bout duquel la température atteint 40 pour cent de l'amplitude

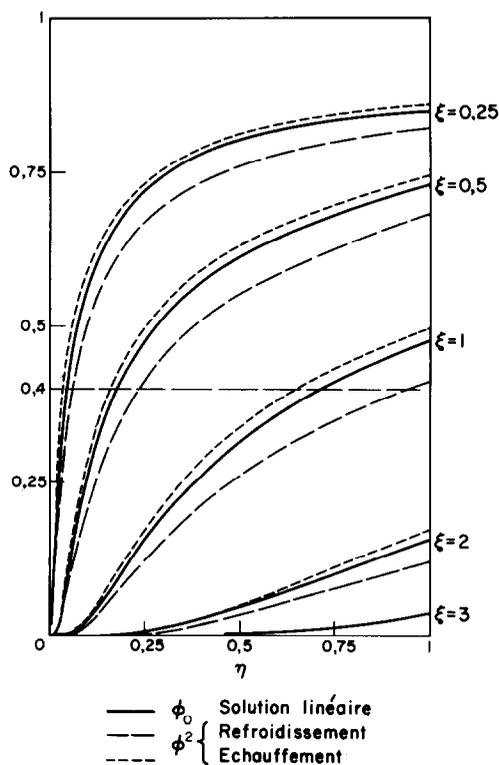


FIG. 2.

de la perturbation sur l'interface, on obtiendrait, en se contentant de l'équation linéarisée (1), une valeur de la diffusivité  $D_0$  en défaut de 10 pour cent si la perturbation est positive (échauffement) et en excès de 25 pour cent si cette perturbation est négative (refroidissement).

## BIBLIOGRAPHIE

1. M. CUTLER et G. T. CHENEY, Heat wave method for the measurement of thermal diffusivity, *J. Appl. Phys.* **34**(7), 1902-1909 (1963).
2. J. P. BARDON, H. CORDIER et P. DESROCHERS, Une méthode de mesure de la diffusivité thermique des métaux, *Des Rochers, Eptropie*, Fr., No. 13, pp. 11-17 (1967).
3. J. L. MACQUERON, G. SINICKI, G. DURAND et D. RINALDI, Mesure de la diffusivité thermique par la méthode du signal bref, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **265**, 440-443 (1967).
4. F. TREVES, Indication sur l'état actuel de la théorie mathématique des équations des champs conductifs pour une diffusivité variable, *Journées Internationales de la Transmission de la Chaleur*, Tome 1, pp. 23-30. Institut Français des Combustibles et de l'Energie (Juin 1961).
5. W. CLAUSON, On a non-linear problem in heat conduction, *Chem. Engng Prog. Symp. Ser.* **57**, **61**, 16-25 (1965).
6. T. TUNG, Transient state heat transfer and diffusion problems, *Ind. Engng Chem.* **52**(8), 707-710 (1960).
7. V. IVANOV, Contribution à la solution de l'équation non-linéaire de la conductivité thermique par la méthode du développement d'après un petit paramètre, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* No. 2, 170-172 (1967).
8. P. GEIRINGEN, *Handbook of Heat Transfer Media*, pp. 182-189. Reinhold, New York (1962).

**Abstract**—The problem of the heating and cooling of a semi-infinite wall in which thermophysical characteristics depend on the temperature is solved with an approximation of the second order. The nonlinearity induces a dissymetry between heating and cooling. The omission of that nonlinearity leads to an important error in the measurement, in the transient state, of the thermic diffusivity of materials.

**Zusammenfassung**—Es wird das Problem der Heizung und Kühlung einer halbenendlichen Wand mit temperaturabhängigen thermophysikalischen Charakteristika auf Grund einer Näherung zweiter Ordnung gelöst. Die Nichtlinearität bewirkt eine Unsymmetrie zwischen Heizung und Kühlung. Die Vernachlässigung dieser Nichtlinearität führt zu einem wichtigen Fehler in der Messung der Temperaturleitfähigkeit im instationären Fall.

**Аннотация**—Во втором приближении решена задача о нагревании и охлаждении полубесконечной стенки с теплофизическими характеристиками, зависящими от температуры. Нелинейность нарушает равновесие между нагреванием и охлаждением. Пренебрежение этой нелинейностью приводит к значительным ошибкам в измерениях теплопроводности материалов при переходном режиме.